11

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2023
Clasa a XI – a

V3

SUBIECTE:

1. a) Demonstrați că pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea:

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=0_2$. **(1p)**

b) Găsiți o matrice $B\in M_2(\mathbb{Q})$, astfel încât $B^2=7I_2$. **(3p)**

c) Arătați că, pentru o matrice $X\in M_2(\mathbb{Q})$ cu $\det(X^2-7I_2)=0$, avem $X^2=7I_2$. **(3p)**

2. . Fie matricea $A_n=\begin{pmatrix} 1+\ln\frac{n+1}{n} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1+\ln\frac{n+2}{n+1} & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1+\ln\frac{n+3}{n+2} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\ln\frac{2n}{2n-1} \end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Definim șirurile de numere reale $x_n=\det A_n$ și $y_n=\det(A_n-I_n)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. **(4p)**

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+y_n)^{2023}-1}{y_n}$. **(3p)**

3. Fie A și B două matrice pătratice, $A, B\in M_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $AB-BA=A^2$.

Demonstrați că $(B-A)^{2024}=B^{2023}(B-2024A)$. **(7p)**

4. Un determinant de ordinul al treilea cu toate elementele reale, are pe diagonala principală toate numerele egale cu $\frac{1}{2}$, iar pe fiecare linie și fiecare coloană suma elementelor este egală cu 1.

a) Arătați că valoarea determinantului este un număr pozitiv. **(5p)**

b) Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua determinantul. **(2p)**

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată. Timp de lucru: 3 ore.